

Teoría de la divisibilidad



• Introducción

En este capítulo abordaremos una parte de la llamada aritmética superior o teoría de los números la cual tiene diversas aplicaciones que van desde la resolución de problemas de las ramas más sofisticadas de la matemática, pasando por aplicaciones en la ingeniería, distribuciones, optimización, etc, hasta la resolución de problemas sencillos por su apariencia o de juegos y "trucos" aritméticos.

La aplicación práctica de esta teoría no solo requiere saber las reglas teóricas sino también agudeza mental, la cual se adquiere por medio del desarrollo mental que exige el conocimiento en las diversas facetas, las situaciones serias o de simples entretenimientos. Ejemplo:

* Los barriles

Una persona desea vender barriles de vino de 46ℓ, 31ℓ, 22ℓ, 20ℓ, 8ℓ y 6ℓ. Se presentaron dos clientes: el primero compró dos barriles, el otro 3 barriles y observó que el volumen total comprado era dos veces más de lo que compró el primero. ¿Cuántas posibilidades de comprar, según las condiciones tiene, el segundo? ¿Qué barril no se vendió?

• Divisibilidad

Un número entero "A" es divisible entre un entero positivo "B" si al dividir "A" entre "B" la división entera es exacta, es decir, el residuo es igual a cero.

* Ejemplo inductivo:

Averiguar si 72 es divisible entre 6. Veamos:

$$\begin{array}{r} 72 \quad | \quad 6 \\ 0 \quad 12 \end{array}$$

Como la división es exacta:

72 es divisible entre 6
6 es divisor de 72

Ahora, esta división, según su algoritmo es equivalente a: $72 = 6(12)$

De esta multiplicación, diremos:

72 es múltiplo de 6
6 es módulo de 72

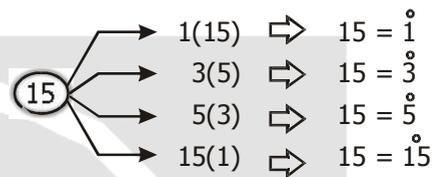
Observación:

Si "72 es divisible entre 6" entonces "72 es múltiplo de 6" y viceversa, es decir, son equivalentes.

Notación: Para expresar simbólicamente que "A" es múltiplo de "B" escribiremos: $A = \overset{\circ}{B}$ (notación de Leibniz)

Nota: Todo entero es múltiplo de los factores positivos o divisores que contiene:

Ejemplo:



• Aplicación:

Determine en forma explícita los divisores y los múltiplos de 15.

Resolución:

- * Los divisores positivos de 15 son: $D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$
- * Los múltiplos de 15 son:

$$\overset{\circ}{15} = 15k \begin{cases} \rightarrow 15(1), 15(2), 15(3), 15(4), \dots(\text{positivos}) \\ \rightarrow 15(0) = \text{cero} \\ \rightarrow 15(-1), 15(-2), 15(-3), 15(-4), \dots(\text{negativos}) \end{cases}$$

donde "k" es un entero cualquiera

Observaciones:

- Los divisores de un número entero forman un conjunto finito. Los múltiplos de un número entero positivo forman un conjunto infinito.
 - La unidad es divisor de todo entero, se le llama divisor universal.
 - El cero es múltiplo de todo entero positivo.
- * Hasta ahora se ha visto el caso cuando un número es divisible por otro, sin embargo, dicho número puede resultar no divisible entre algún otro número. Esto es cuando la división es inexacta.
 - * **Ejemplo inductivo:**
Averiguar si 72 es divisible entre 15

Veamos; efectuando la división por:

Defecto

Exceso

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 15} \\ \underline{12} \\ 12 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 15} \\ \underline{3} \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

Según el algoritmo de la división:

$$72 = 15(4) + 12$$

$$72 = 15(5) - 3$$

Se observa que 72 no es divisible entre 15, sin embargo se puede expresar en función de este módulo:

$$72 = 15 + 12$$

$$\text{ó } 72 = 15 - 3$$

Además, debes recordar que la suma de los residuos es igual al divisor (módulo): $12 + 3 = 15$

Luego:

Si: $N = 15 + 4$, significa que al dividir "N" entre 15 el residuo por defecto es 4.

* Si: $A = 9 - 2$, significa que al dividir "A" entre 9 el residuo por exceso es 2.

• Principios de multiplicidad

* Primer principio

Operaciones aritméticas elementales con múltiplos de un mismo módulo.

Adición:

$$\begin{array}{r} 44 + 33 = 77 \\ 11(4) + 11(3) = 11(7) \\ \downarrow \\ \boxed{11 + 11 = 11} \end{array}$$

Luego, si: $A = n$ y $B = n$ entonces:

$$A + B = n$$

Sustracción:

$$\begin{array}{r} 99 - 63 = 36 \\ 9(11) - 9(7) = 9(4) \\ \downarrow \\ \boxed{9 - 9 = 9} \end{array}$$

Luego, si: $A = n$ y $B = n$, entonces: $A - B = n$

Multiplicación:

$$44 = 11 \text{ entonces: } 44(5) = \begin{array}{l} \rightarrow 11 \\ \rightarrow 5 \\ \rightarrow 55 \end{array}$$

Así también:

$$\text{Si: } A = 7 \text{ entonces: } 11A = \begin{array}{l} \rightarrow 7 \\ \rightarrow 11 \\ \rightarrow 77 \end{array}$$

Luego, si: $A = n$ y "k" es un número entero positivo.

$$k.A = \begin{array}{l} \rightarrow n \\ \rightarrow k \\ \rightarrow (kn) \end{array}$$

Nota: Si un número es $n + a$ y otro es $n + b$ entonces el producto de ambos es: $n + a \times b$

Ejemplos:

$$* (7 + 2) \cdot (7 + 3) = 7 + \underbrace{2 \times 3}_{6} = 7 + 6$$

$$* (11 - 3) \cdot (11 + 4) = 11 - 12$$

$$* (9 + 2) \cdot (9 - 4) \cdot (9 + 3) = 9 - 24$$

Potenciación:

$$(10)^3 = 1000$$

$$(5)^3 = 5$$

Luego, si: $A = n$ entonces: $A^K = n$ donde "K" es un entero positivo.

* **Segundo principio**

Ejemplos:

Si:

$$N = 15 = 15k = 1 \times 3 \times 5k \left. \begin{array}{l} \rightarrow N = 1 \\ \rightarrow N = 3 \\ \rightarrow N = 5 \\ \rightarrow N = 15 \end{array} \right\} \text{divisores de 15}$$

Si: $\overline{abc} = 35^{\circ}$ \rightarrow $\overline{abc} \begin{cases} \rightarrow 5^{\circ} \\ \rightarrow 7^{\circ} \end{cases}$

*** Tercer principio**

Ejemplos:

Si: $4 \times N = 7^{\circ}$ \rightarrow $N = 7^{\circ}$
 no comparten divisores comunes, aparte del uno

Si: $9 \times A = 8^{\circ}$ \rightarrow $A = 8^{\circ}$

Si: $6 \times \overline{ab} = 11^{\circ}$ \rightarrow $\overline{ab} = 11^{\circ}$

Otros casos:

i) $9 \times N = 15^{\circ}$
 divisores comunes: 1 y 3

En este caso, en forma practica, se simplifica y queda:

$3N = 5^{\circ} \Rightarrow N = 5^{\circ}$

ii) $\rightarrow \begin{cases} 3N = 10^{\circ} + 9 \\ 1N = 10^{\circ} + 3 \end{cases} \div 3$

Problemas para la clase

Bloque I

- ¿Cuántos enteros múltiplos de siete son mayores que 140 pero no mayores que 210?
 a) 9 b) 10 c) 8
 d) 11 e) 7
- ¿Cuántos naturales de tres cifras, que terminan en cifra 7, son divisibles entre 13?
 a) 5 b) 10 c) 7
 d) 8 e) 9
- ¿Cuántos números positivos que terminan en cifra 2, al dividirlos entre 13 dejan 7 de residuo?
 a) 5 b) 6 c) 7
 d) 8 e) 9

4. De los números del 1 al 600, cuántos son:

- múltiplos de 3
- múltiplos de 5
- múltiplos de 7
- múltiplos de 21
- múltiplos de 3 pero no de 7

5. Al dividir 420 entre un número de dos cifras se obtuvo 13 de residuo. Halle el residuo por exceso.

- 2
- 12
- 24
- 36
- 15

6. Si: $\overline{4ab5}$ es divisible entre 19. Halle cuántos valores toma \overline{ab} .

- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

7. ¿Cuántos números de la forma $\overline{ab0ab}$ son múltiplos de 187?

- 12
- 23
- 4
- 8
- 5

8. ¿Cuántos términos de la sucesión:

$7, 15, 23, 31, \dots, 399$ son 11° ?

- 20
- 16
- 4
- 10
- 5

9. ¿Cuántos naturales de tres cifras son divisibles entre 7 pero no lo son ni entre 2, ni entre 5?

- 51
- 93
- 64
- 13
- 128

10. Halle el residuo de dividir "N" entre 19, si:

$N = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 26$

- 3
- 12
- 7
- 5
- 14

11. De los 420 primeros números enteros positivos, ¿cuántos no son ni 4 ni 6?

- 360
- 125
- 64
- 280
- 180

12. Si \overline{abab} es $17^{\circ} + 5$, halle la suma de los valores de \overline{ab} .

- 327
- 230
- 87
- 150
- 230

Bloque II

1. Al dividir 388 y 536 entre \overline{ab} se obtuvo de residuo 3 en ambos casos, pero, la primera división fue por defecto y la otra por exceso. Halle "a + b".

- a) 12 b) 6 c) 8
d) 2 e) 14

2. En un seminario de aritmética se observó que los asistentes ocuparon 9 locales, en cada local 33 aulas y en cada aula 59 alumnos. Si usted podría ordenar a todos estos alumnos en filas de 7 alumnos cada uno, ¿cuántos alumnos le faltaría para completar la última fila de 7?

- a) 3 b) 2 c) 6
d) 1 e) 5

3. Martín dispone de S/.157 y comprará cuadernos y lapiceros cuyos precios son S/.5 y S/.3 respectivamente. ¿Cuántas opciones de compra tiene, si debe invertir todo su dinero?

- a) 18 b) 20 c) 6
d) 9 e) 10

4. Con una cuadrilla de soldados que estaban formados en filas de 12 en 12 exactamente, se formó un cuadrado compacto sin que sobre ni falte. Halle cuántos son los soldados, si en la última disposición en una columna no habría más de 59 soldados pero si más de 48.

- a) 2500 b) 1600 c) 2916
d) 2304 e) N.A.

5. ¿Cuántos números de tres cifras son 5^0 pero no 9^0 ?

- a) 320 b) 240 c) 150
d) 180 e) 20

6. Si: $abcd$ es divisible entre 13, además: $\overline{cd} = 3(\overline{ab} + 2)$, ¿cuántos numerales $abcd$ cumplen dichas condiciones?

- a) ninguna b) 1 c) 2
d) 3 e) más de 3

7. Una persona va al mercado a comprar naranjas y manzanas cuyos precios son S/.0,36 y S/.0,42 por unidad. Si gastó S/.7,14, ¿cuántas frutas como máximo compró?

- a) 19 b) 18 c) 17
d) 20 e) 15

8. Carlos compró café, cocoa y avena, cuyos precios por kilo son: S/.12, S/.7 y S/.7,5 respectivamente. ¿Cuántos kilos como máximo se pueden comprar con S/.224 sin que sobre ni falte?

- a) 29 b) 27 c) 31
d) 25 e) 30

9. Con S/.100 se podría comprar un ciento de artículos "C" o bien una decena de "B" o sino un par de "A". Si realmente se compró 100 artículos entre "A", "B" y "C", calcule cuántos artículos de cada tipo se compraron si se gastó S/.500, ¿cuántos artículos se compraron?

- a) 60 b) 40 c) 39
d) 1 e) 10

10. Si $mnpmn$ es divisible entre 133, además "p" no es impar, halle cuántos numerales cumplen dichas condiciones.

- a) 10 b) 3 c) 12
d) 15 e) 5

11. Si: $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = 45^0$. Halle el residuo de dividir "n" entre 18, sabiendo que es impar.

- a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 17

Enunciado:

Se disponen de 7060 lápices los cuales se van a acomodar en grupos de un mismo número de lápices de tal manera que en cada distribución sobren 10 lápices.

12. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir estos lápices?

- a) 20 b) 18 c) 16
d) 22 e) más de 22

13. El menor número de lápices que contiene cada grupo es:

- a) 12 b) 15 c) 20
d) 25 e) 30

14. Al agruparlos en grupos de 150 lápices obtenemos:

- a) 40 grupos b) 45 grupos c) 47 grupos
d) 43 grupos e) 50 grupos

